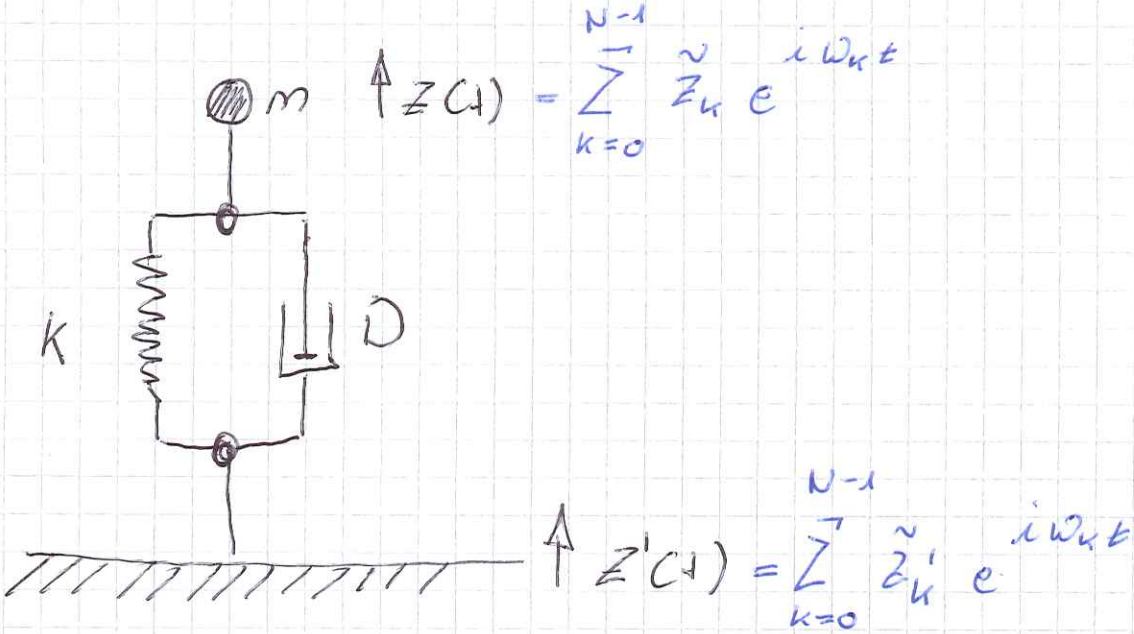
① Theorie der Schwingungen eines „einfachen" gedämpften Masse-Feder-Systems

Der Einfachheit halber soll (zunächst) ein eindimensionales vertikales System betrachtet werden. Eine Masse m ist über eine Feder mit der Federkonstante k und der Dämpfung D auf einer Unterlage (Fußboden) befestigt. Die Unterlage bewegt sich vertikal. Die Bewegung wird durch $z'(t)$ beschrieben. Es soll nun bestimmt werden, wie sich diese Bewegung auf die Masse übertragen wird. Die Anordnung wird durch die nachfolgende Skizze veranschaulicht:



(11)

$$\frac{\tilde{Z}_k \tilde{Z}_k^*}{\tilde{Z}_k' \tilde{Z}_k'^*} = \frac{\Omega_k^4}{(1-\Omega_k^2)^2 + 4\Lambda^2\Omega_k^2}$$

Die Übertragungsfunktion T wird definiert als

$$T(\Omega_k) = \sqrt{\frac{\tilde{Z}_k \tilde{Z}_k^*}{\tilde{Z}_k' \tilde{Z}_k'^*}}$$

$$\boxed{T(\Omega_k) = \frac{\Omega_k^2}{\sqrt{(1-\Omega_k^2)^2 + 4\Lambda^2\Omega_k^2}}}$$

(3)

Die Resonanzfrequenz ist die Frequenz, bei der T maximal ist. Dafür muss man die Nullstelle der ersten Ableitung bestimmen.

$$\frac{d}{d\Omega_k} T = \frac{2((2\Lambda^2 - 1)\Omega_k^3 + \Omega_k)}{((4\Lambda^2 - 2)\Omega_k^2 + \Omega_k^4 + 1)^{3/2}}$$

Die Ableitung habe ich mit Hilfe von

www.wolframalpha.com

bestimmt. Dort erhält man auch sofort die Nullstelle Ω_R :

$$\boxed{\Omega_R = \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda^2}}} \qquad \lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vergleich ~~zwischen~~ von Resonanzfrequenz und Eigenfrequenz Ω_E
(Eigenfrequenz siehe Seite 4)

$$\boxed{\Omega_E = \frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1-\lambda^2}} \qquad \lambda < 1^{*}$$

Anmerkung: Liegt λ zwischen $1/\sqrt{2}$ und 1, dann existieren Eigenfrequenzen, aber keine Resonanzfrequenzen!

Man muss erst untersuchen, welche Resonanzen man noch messen kann, um den Unterschied zwischen ω_R und ω_E beurteilen zu können. Ohne weitere Begründung wird angenommen, dass man Resonanzen mit $T > 2$ messen kann. Es gilt

$$T(\Omega_R) = \frac{1}{(1-2\lambda^2)\sqrt{\left(1-\frac{1}{1-2\lambda^2}\right)^2 + \frac{4\lambda^2}{(1-2\lambda^2)}}}$$

$$= 1 \Big/ \left[\sqrt{(1-2\lambda^2)^2\left(\left(1-\frac{1}{1-2\lambda^2}\right)^2 + \frac{4\lambda^2}{(1-2\lambda^2)}\right)}\right]$$

$$\boxed{V(\Omega_R) = \frac{1}{2\Lambda\sqrt{1-\Lambda^2}}}$$

$\Lambda = \sqrt{\frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}}$ für $V(\Omega_R) = 2$. Wegen $\Lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}$ gibt es nur eine Lösung

$V(\Omega_R) = 1$ für $\Lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ↯

$$\Lambda = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \cong 0{,}5\cancel{63}\,2588$$

$$\frac{\Omega_R}{\Omega_E}\left(\Lambda = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{(1-2\Lambda^2)(1-\Lambda^2)}} = 1{,}11$$

Das bedeutet, dass die Resonanzfrequenzen eines System maximal 11% höher sind, als bei der Modalanalyse bestimmt.
Nun soll noch die „Breite" der Resonanzkurve (3) bestimmt werden. Als Breite wird der Frequenzunterschied bezeichnet, bei dem die Resonanzkurve auf das halbe Maximum abgesunken ist. Daraus folgt für $\Lambda \ll 1$:

(14)

$$T(1+\Delta\Omega_K) \cong \frac{1}{2\Lambda} + \frac{1}{2\Lambda}\Delta\Omega_K - \frac{1}{4\Lambda^3}\Delta\Omega_K^2$$

$$= \frac{1}{4\Lambda} \quad \Rightarrow$$

$$2 + 2\Delta\Omega_K - \frac{1}{\Lambda^2}\Delta\Omega_K^2 = 1$$

$$\Delta\Omega_K^2 - 2\Lambda^2\Delta\Omega_K - \Lambda^2 = 0$$

$$\Delta\Omega_K = \Lambda^2 \pm \sqrt{\Lambda^4 + \Lambda^2} \cong \pm\Lambda$$

$$\boxed{\Delta\Omega_K = \pm\Lambda}$$